ÁREA 1. ALGORITMIA

SUBÁREA 1.3 MATEMÁTICAS DISCRETAS

TEMAS IMPORTANTES:

Conteo:

Principios de conteo: Los principios de conteo son herramientas fundamentales en el cálculo de posibilidades. Los más comunes son el principio de adición, el principio de multiplicación y el principio de inclusión-exclusión. El principio de adición se usa cuando se deben contar eventos que pueden ocurrir de dos o más formas, mientras que el principio de multiplicación se utiliza cuando se deben contar eventos que ocurren de forma consecutiva y se deben multiplicar las posibilidades. El principio de inclusión-exclusión se aplica cuando se quieren contar todos los eventos posibles, pero algunos de ellos pueden ser contados varias veces.

Progresiones geométricas y aritméticas: Las progresiones geométricas y aritméticas son secuencias matemáticas que se usan en diversas aplicaciones. En una progresión aritmética, cada término es la suma del término anterior y una constante llamada diferencia. En una progresión geométrica, cada término es el producto del término anterior y una constante llamada razón.

Principio de las casillas: El principio de las casillas se utiliza para contar la cantidad de maneras en que se pueden colocar objetos en una serie de casillas. Si hay n objetos y m casillas, entonces la cantidad de maneras de colocar los objetos en las casillas es igual a m^n.

Ejemplos:

Principios de conteo:

Si tienes una camisa roja y una azul, y un pantalón negro y uno marrón, ¿de cuántas formas distintas puedes combinar una camisa y un pantalón? Utilizando el principio de multiplicación, tendrías 2 opciones para la camisa y 2 opciones para el pantalón, lo que da un total de 2x2=4 combinaciones posibles.

Supongamos que tienes una caja con 10 pelotas, 6 de ellas rojas y 4 de ellas verdes. Si sacas 2 pelotas al azar, ¿de cuántas formas distintas puedes sacar una pelota roja y una pelota verde? Utilizando el principio de multiplicación, tendrías 6 opciones para la primera pelota y 4 opciones para la segunda pelota, lo que da un total de 6x4=24 combinaciones posibles.

Progresiones geométricas y aritméticas:

Una progresión aritmética con un primer término de 5 y una diferencia de 2 tendría los siguientes términos: 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

Una progresión geométrica con un primer término de 3 y una razón de 2 tendría los siguientes términos: 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

Principio de las casillas:

Si tienes 4 libros distintos y 3 estantes, ¿de cuántas formas distintas puedes colocar los libros en los estantes (si cada estante sólo puede contener un libro)? Utilizando el principio de las casillas, tendrías 3 opciones para el primer libro, 2 opciones para el segundo libro (ya que no puede ir en el mismo estante que el primer libro), y 1 opción para el tercer libro (ya que sólo queda un estante disponible). Esto da un total de 3x2x1=6 formas distintas de colocar los libros en los estantes.

Permutaciones y Combinaciones

Las permutaciones y combinaciones son conceptos importantes en el campo de la matemática discreta, especialmente en la teoría de la probabilidad y estadística. A continuación, te explico brevemente cada uno de ellos:

Permutaciones: Una permutación es un arreglo ordenado de elementos distintos. En otras palabras, una permutación es un subconjunto ordenado de una colección de objetos. El número de permutaciones de un conjunto de n objetos se denota como n!, que se lee como "n factorial". Por ejemplo, las permutaciones de los números 1, 2 y 3 son: 123, 132, 213, 231, 312 y 321.

Combinaciones: Una combinación es un subconjunto no ordenado de elementos distintos de una colección. Es decir, una combinación es una selección de k elementos de un conjunto de n elementos, donde el orden no importa. El número de combinaciones de n elementos tomados k a la vez se denota como nCk, que se lee como "n combinatorio k". Por ejemplo, el número de combinaciones de 3 elementos tomados 2 a la vez es 3C2 = 3. Las combinaciones de los elementos {1, 2, 3} tomados 2 a la vez son: {1, 2}, {1, 3}, y {2, 3}.

Es importante destacar que la fórmula para calcular el número de permutaciones o combinaciones varía en función del problema específico. Por ejemplo, el número de permutaciones de un conjunto de n elementos tomados k a la vez es n!/(n-k)!, mientras que el número de combinaciones de n elementos tomados k a la vez es n!/k!(n-k)!.

Métodos de Demostración:

Los métodos de demostración son técnicas utilizadas para probar la validez o veracidad de una proposición o teorema. Aquí hay algunos métodos comunes de demostración utilizados en matemáticas:

Demostración directa: Este es el método más simple y común de demostración. Se parte de las premisas o hipótesis de un teorema y se siguen una serie de pasos lógicos hasta llegar a la conclusión deseada. Por ejemplo, para demostrar que la suma de dos números pares es un número par, se puede comenzar diciendo que los dos números son pares, y luego sumarlos para mostrar que el resultado también es par.

Demostración por contradicción: Este método supone que la proposición que se quiere demostrar es falsa, y luego se demuestra que esta suposición lleva a una contradicción lógica. Por lo tanto, la suposición inicial debe ser falsa y la proposición original debe ser verdadera. Por ejemplo, para demostrar que la raíz cuadrada de 2 es irracional, se puede suponer que es racional y luego llegar a una contradicción lógica.

Demostración por inducción: Este método se utiliza para demostrar proposiciones que tienen una estructura recursiva. Se prueba que una afirmación es verdadera para un caso base (por lo general, el valor más pequeño posible), y luego se prueba que, si es cierta para un valor dado, también lo es para el siguiente valor en la secuencia. Por ejemplo, se puede utilizar la demostración por inducción para demostrar que la suma de los primeros n números naturales es n(n+1)/2.

Demostración por contrapositiva: Este método implica demostrar que la afirmación contraria de la proposición original es verdadera. Por ejemplo, para demostrar que si un número es divisible por 4, entonces también es divisible por 2, se puede demostrar la afirmación contrapositiva de que si un número no es divisible por 2, entonces tampoco es divisible por 4.

Demostración por exhaustividad: Este método implica probar la validez de una proposición para cada uno de los posibles casos. Por ejemplo, para demostrar que un triángulo es equilátero, se puede probar que los tres lados son iguales, los tres ángulos son iguales y que cada una de las medianas es igual.

La elección del método de demostración adecuado depende de la proposición que se quiere demostrar y de la estrategia que se considere más efectiva. A continuación, se presentan algunas pautas generales para ayudar a elegir el método de demostración adecuado:

Demostración directa: Este método es útil cuando se tiene una proposición clara y sencilla que se puede demostrar a través de un conjunto de pasos lógicos.

Demostración por contradicción: Este método es útil cuando se quiere demostrar la verdad de una proposición, pero resulta difícil encontrar una demostración directa. En general, se recomienda utilizar este método si la proposición en cuestión es negativa, es decir, si se quiere demostrar que algo no es verdad.

Demostración por inducción: Este método es útil cuando se quiere demostrar una proposición que tiene una estructura recursiva o que depende de un parámetro entero, como la fórmula para la suma de los primeros n números naturales.

Demostración por contrapositiva: Este método es útil cuando se quiere demostrar una proposición que tiene una implicación condicional, como "Si A, entonces B". En general, se recomienda utilizar este método cuando es más fácil demostrar la afirmación contrapositiva que la afirmación original.

Demostración por exhaustividad: Este método es útil cuando se quiere demostrar que una proposición es verdadera para cada uno de los posibles casos. En general, se recomienda utilizar este método cuando la proposición en cuestión es simple y el número de casos posibles es finito.

Conjuntos:

un conjunto es una colección bien definida de objetos o elementos, que se llaman miembros o elementos del conjunto. Los conjuntos se representan mediante llaves y se separan los elementos con comas. Por ejemplo, el conjunto de números naturales menores que 5 se representa como {0, 1, 2, 3, 4}.

Existen diferentes tipos de conjuntos, a continuación, se presentan algunos de ellos:

Conjunto vacío: Es el conjunto que no tiene ningún elemento y se denota como ∅ o {}.

Conjunto finito: Es aquel que tiene un número finito de elementos. Por ejemplo, el conjunto de los días de la semana.

Conjunto infinito: Es aquel que tiene un número infinito de elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros positivos.

Conjunto unitario: Es aquel que tiene un solo elemento. Por ejemplo, el conjunto {5}.

Conjunto universal: Es aquel que contiene todos los elementos que se están considerando en un contexto dado. Por ejemplo, el conjunto de los números reales.

Subconjunto: Un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si todos los elementos de A también son elementos de B. Se denota como A ⊆ B.

Conjunto complementario: Es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a un conjunto dado. Se denota como A'.

Conjunto intersección: Es el conjunto de elementos que pertenecen a dos o más conjuntos dados. Se denota como A ∩ B.

Conjunto unión: Es el conjunto de elementos que pertenecen a uno de los dos o más conjuntos dados. Se denota como A ∪ B.

Conjunto diferencia: Es el conjunto de elementos que pertenecen a un conjunto dado, pero no a otro conjunto dado. Se denota como A - B.

Las operaciones en conjunto son las operaciones que se realizan entre dos o más conjuntos. Las operaciones básicas en conjunto son la unión, la intersección, la diferencia y el complemento.

Unión: La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos conjuntos. Se denota como A ∪ B.

Intersección: La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Se denota como A ∩ B.

Diferencia: La diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A pero no a B. Se denota como A - B.

Complemento: El complemento de un conjunto A con respecto a un conjunto universal U es el conjunto que contiene todos los elementos de U que no pertenecen a A. Se denota como A'.

Además de estas operaciones básicas, existen otras operaciones en conjunto, como la diferencia simétrica, el producto cartesiano y la potencia de un conjunto, entre otras.

Diferencia simétrica: La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos conjuntos. Se denota como A Δ B.

Producto cartesiano: El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de todas las parejas ordenadas (a,b) donde a pertenece a A y b pertenece a B. Se denota como A x B.

Potencia de un conjunto: La potencia de un conjunto A es el conjunto de todos los subconjuntos de A, incluyendo el conjunto vacío y el propio conjunto A. Se denota como P(A).

Relaciones entre Conjuntos:

Funciones:

Operaciones Aritméticas en Diferentes Bases Numéricas:

Las operaciones aritméticas en diferentes bases numéricas siguen los mismos principios que en la base decimal. Sin embargo, el sistema de numeración cambia y es importante tener en cuenta las reglas de cada sistema para realizar las operaciones correctamente. A continuación, se presentan las operaciones aritméticas básicas en diferentes bases numéricas:

Suma: Para sumar números en diferentes bases numéricas, se deben alinear las cifras correspondientes y realizar la suma como en el sistema decimal. Si la suma de dos cifras es mayor que la base numérica, se debe llevar una unidad al siguiente dígito. Por ejemplo:

Suma en base 2: 1101 + 101 = 10010 (11 + 5 = 16)

Suma en base 8: 456 + 712 = 1170 (6 + 2 = 10, llevando 1 al siguiente dígito)

Suma en base 16: 3A8 + B2F = CDD (8 + F = 17, llevando 1 al siguiente dígito)

Resta: Para restar números en diferentes bases numéricas, se deben alinear las cifras correspondientes y realizar la resta como en el sistema decimal. Si la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo, se debe tomar prestada una unidad del siguiente dígito. Por ejemplo:

Resta en base 2: 1101 - 101 = 100 (1 - 1 = 0, llevando 1 al siguiente dígito)

Resta en base 8: 456 - 312 = 144 (6 - 2 = 4, tomando prestada 1 unidad del siguiente dígito)

Resta en base 16: 3A8 - B2F = 285 (8 - F = -7, tomando prestada 1 unidad del siguiente dígito)

Multiplicación: Para multiplicar números en diferentes bases numéricas, se deben multiplicar las cifras correspondientes y sumar los resultados como en el sistema decimal. Luego, se deben llevar las unidades y las decenas si la suma es mayor que la base numérica. Por ejemplo:

Multiplicación en base 2: 101 x 11 = 1111 (5 x 3 = 15, llevando 1 al siguiente dígito)

Multiplicación en base 8: 456 x 23 = 10476 (6 x 3 = 16, llevando 1 al siguiente dígito)

Multiplicación en base 16: A3 x B4 = 7D38 (3 x 4 = C, llevando 1 al siguiente dígito)

División: Para dividir números en diferentes bases numéricas, se deben realizar las divisiones como en el sistema decimal y llevar el resto al siguiente dígito. El cociente se escribe en la base numérica correspondiente. Por ejemplo:

División en base 2: 11010 / 101 = 110 (2 x 101 = 202, llevando 1 al siguiente dígito)

División en base 8: 456 / 23 = 20 (2 x 23 = 46, llevando 2 al siguiente dígito)

División en base 16: A3B / 4F = 28 (4 x 4F = 1EC, llevando 42 al siguiente dígito)

Operaciones con Matrices:

Suma de matrices: para sumar dos matrices, estas deben ser del mismo tamaño. La suma se realiza sumando los elementos correspondientes de cada matriz. Por ejemplo:

A = [1 2 3]

[4 5 6]

B = [0 1 2]

[3 4 5]

A + B = [1+0 2+1 3+2]

[4+3 5+4 6+5]

= [1 3 5]

[7 9 11]

Resta de matrices: la resta de matrices se realiza de manera similar a la suma, pero restando los elementos correspondientes de cada matriz. Es importante destacar que las matrices deben ser del mismo tamaño. Por ejemplo:

A = [1 2 3]

[4 5 6]

B = [0 1 2]

[3 4 5]

A - B = [1-0 2-1 3-2]

[4-3 5-4 6-5]

= [1 1 1]

[1 1 1]

Multiplicación de matrices: para multiplicar dos matrices A y B, la cantidad de columnas de la matriz A debe ser igual a la cantidad de filas de la matriz B. El resultado de la multiplicación es una matriz de tamaño igual a la cantidad de filas de A por la cantidad de columnas de B. Para multiplicar dos matrices A y B se multiplica cada elemento de la fila de A por el elemento correspondiente de la columna de B y se suman los resultados. Por ejemplo:

A = [1 2]

[3 4]

B = [5 6]

[7 8]

AB = [15 + 27 16 + 28]

[35 + 47 36 + 48]

= [19 22]

[43 50]

Transposición de una matriz: la transposición de una matriz se obtiene intercambiando las filas por las columnas. Es decir, si A es una matriz de tamaño m x n, la transpuesta de A, A^T, será una matriz de tamaño n x m. Por ejemplo:

A = [1 2 3]

[4 5 6]

A^T = [1 4]

[2 5]

[3 6]

Determinante de una matriz: el determinante de una matriz cuadrada es un número que se puede obtener a partir de los elementos de la matriz. Se utiliza en diferentes aplicaciones matemáticas, como el cálculo de inversas de matrices, entre otros. La fórmula para calcular el determinante de una matriz de tamaño n x n es compleja, pero se puede encontrar en muchos recursos matemáticos.

Inversa de una matriz: La inversa de una matriz es una matriz que al multiplicarla por la matriz original, da como resultado la matriz identidad. Es decir, si A es una matriz cuadrada de tamaño n x n y existe una matriz B de tamaño n x n tal que:

A x B = B x A = I

donde I es la matriz identidad de tamaño n x n, entonces B es la inversa de A y se denota como A^-1.

Para calcular la inversa de una matriz A, se debe seguir los siguientes pasos:

Comprobar que la matriz A es cuadrada (es decir, que tiene el mismo número de filas y columnas).

Calcular el determinante de la matriz A (denotado como det(A)).

Comprobar que el determinante de A es distinto de cero (det(A) ≠ 0). Si el determinante es cero, la matriz no tiene inversa.

Calcular la matriz adjunta de A (denotada como adj(A)). La matriz adjunta es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores de A.

Calcular la matriz inversa de A utilizando la siguiente fórmula:

A^-1 = (1/det(A)) x adj(A)

donde 1/det(A) es el inverso multiplicativo del determinante de A.